

Szkolny konkurs matematyczny
„TORUS”
Zestaw zadań nr 2

(do 30 listopada 2011)

Zadanie 1.

Prosta przechodząca przez wierzchołek A równoległoboku ABCD przecina przekątną BD w punkcie E oraz bok BC w punkcie F, a prostą DC w punkcie G. Udowodnij, że $|AE|^2 = |EF| \cdot |EG|$.

Zadanie 2.

Wykaż, że w trapezie prostokątnym różnica kwadratów jego przekątnych jest równa różnicy kwadratów jego podstaw.

Zadanie 3.

Na kole opisany jest romb. Stosunek pola koła do pola rombu wynosi $\frac{\pi}{2}$. Wykaż, że kąt rozwarty rombu zawiera się w przedziale $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$.

Zadanie 4.

W półkole o średnicy AB wpisano okrąg styczny do średnicy AB w jej środku. Znajdź promień okręgu stycznego jednocześnie do półokręgu AB, do wpisanego okręgu oraz do średnicy AB, jeśli $AB = 2R$.

Zadanie 5.

Dwa okręgi są styczne wewnętrznie w punkcie Q. Prosta przechodząca przez środek O_1 mniejszego okręgu przecina większy okrąg w punkcie A i D, a mniejszy okrąg w punktach B i C. Wyznaczyć stosunek długości promienia większego okręgu do promienia mniejszego okręgu, jeżeli: $|AB| : |BD| : |CD| = 2 : 4 : 3$.

Zadanie 6.

Wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzona do przeciwprostokątnej ma długość h i jest pięć razy krótsza od obwodu trójkąta. Oblicz długość przeciwprostokątnej.

Zadanie 7.

Punkt P leży na okręgu opisanego na prostokącie o bokach a i b . Wykaż, że suma kwadratów odległości punktu P od prostych zawierających boki prostokąta jest równa $a^2 + b^2$.